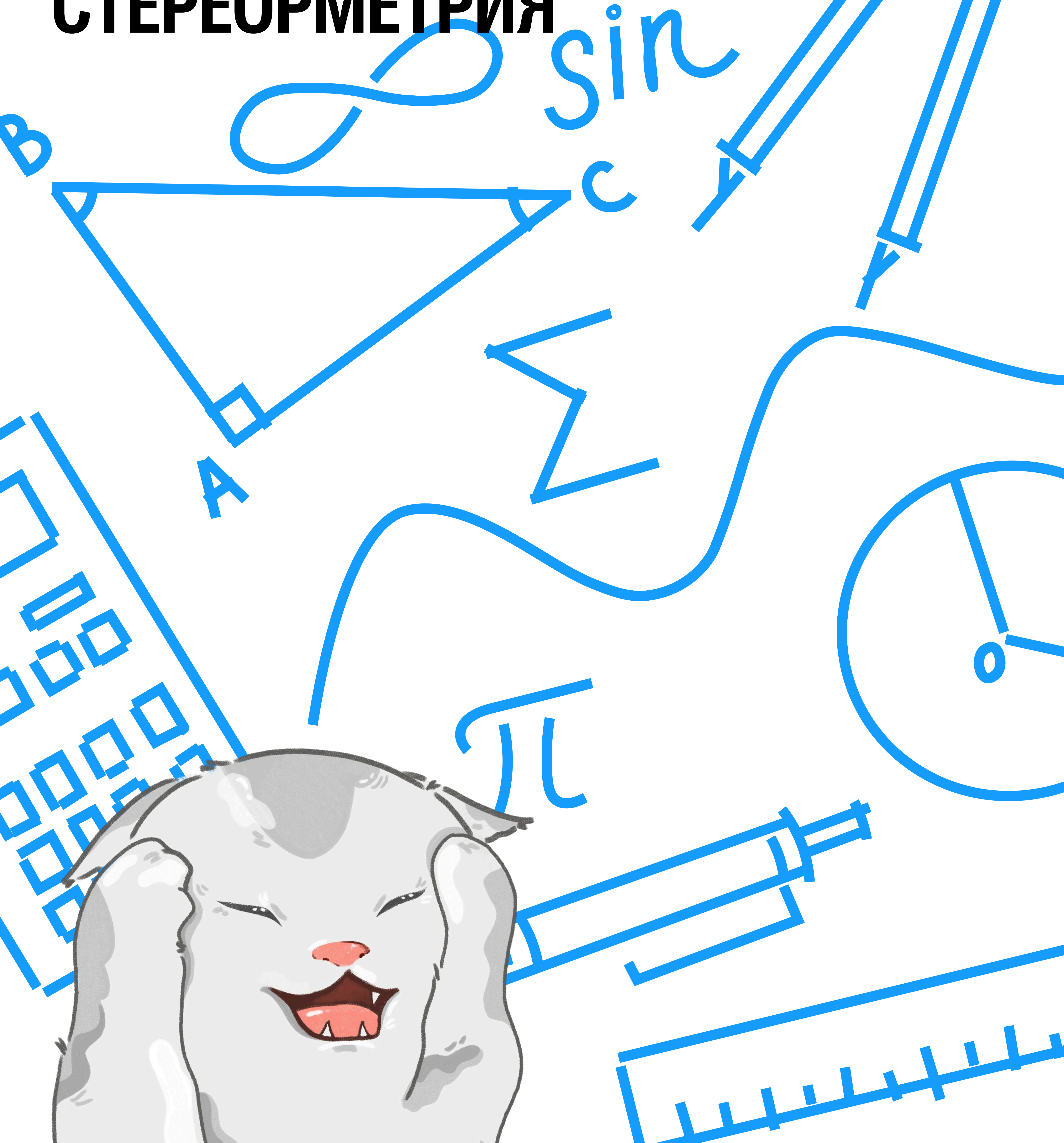
100Б

ТЕОРИЯ

ПРОСТЕЙШАЯ СТЕРЕОРМЕТРИЯ



Аксиомы стереометрии

Аксиомы стереометрии

Стереометрия — раздел геометрии, в котором изучаются фигуры, расположенные в пространстве.

Основные понятия:

Точка, прямая, плоскость.
Аксиома — утверждение, принимаемое без доказательства.

Основные аксиомы:

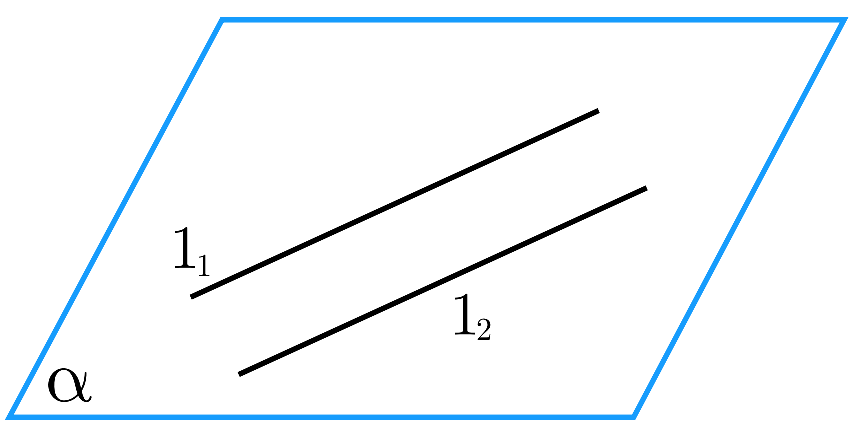
1. Через любые две точки проходит единственная прямая.
2. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость (аксиома определяет плоскость).
3. Если две различные точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит этой плоскости.
4. Если две плоскости пересекаются, то они пересекаются по прямой.
5. Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит единственная плоскость (аксиома определяет плоскость).

Следствия из аксиом:

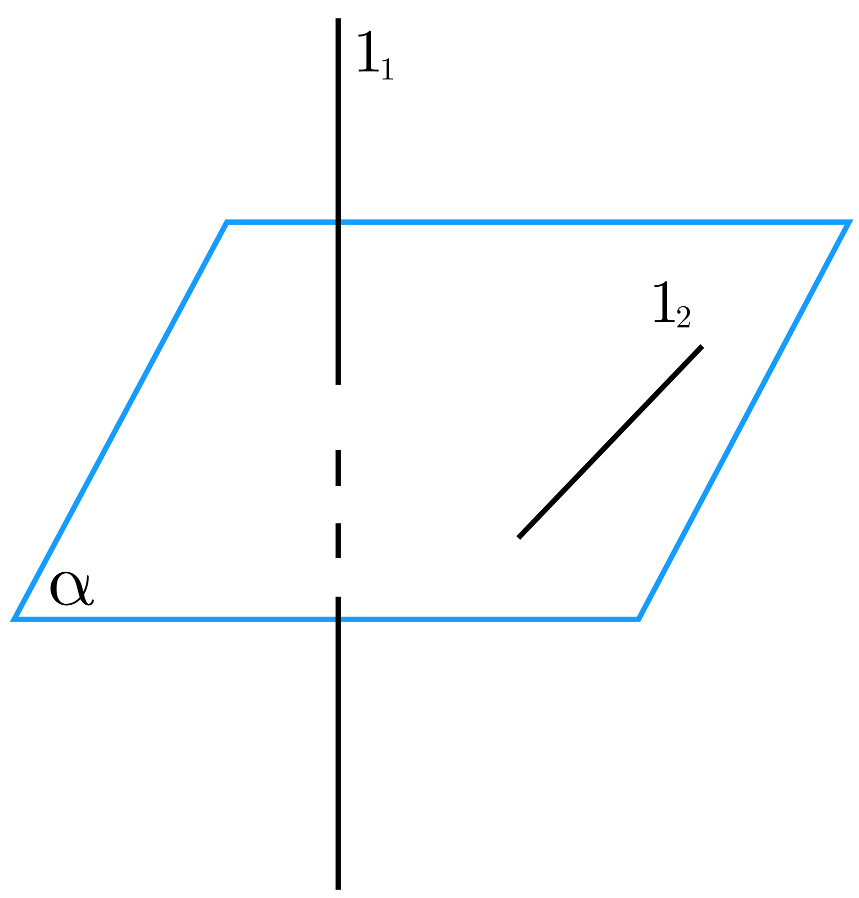
1. Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость (аксиома определяет плоскость).
2. Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость (аксиома определяет плоскость).

Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

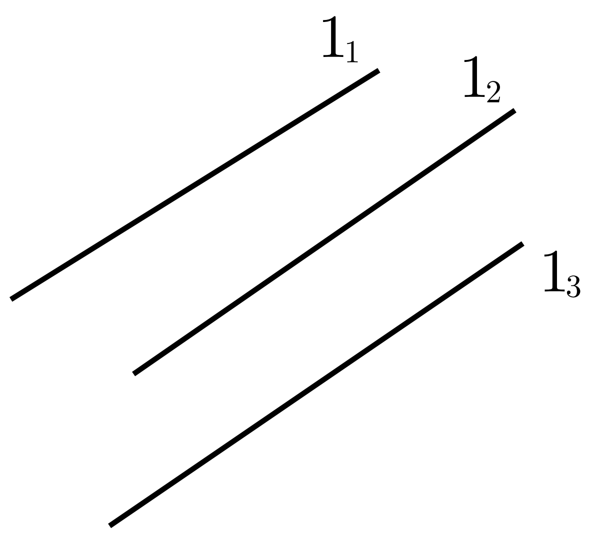
Параллельные прямые — прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек или совпадающие.
$l_1 \parallel l_2$ если
$l_1 \subset \alpha$ и $l_2 \subset \alpha$ и $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ или $l_1 = l_2$



Скрещивающиеся прямые — две прямые, не лежащие в одной плоскости (они не пересекаются и не являются параллельными).
l_1 и l_2 — скрещивающиеся прямые



Аксиомы стереометрии



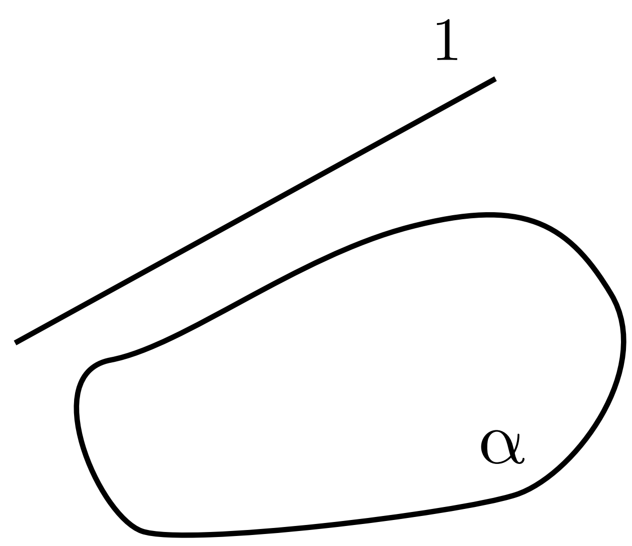
Теорема. Если две прямые параллельны третьей, то они между собой параллельны.

Если $l_1 || l_3$ и $l_2 || l_3$, то $l_1 || l_2$

Параллельность прямой и плоскости

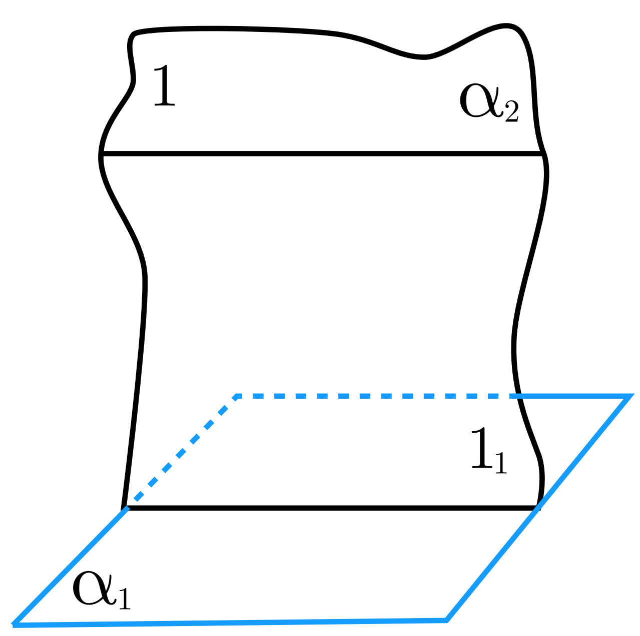
Определение
Если прямая лежит в плоскости или не имеет с ней ни одной общей точки, то прямая и плоскость называются **параллельными**.

$l || \alpha$ если $l \subset \alpha$ или $l \cap \alpha = \emptyset$

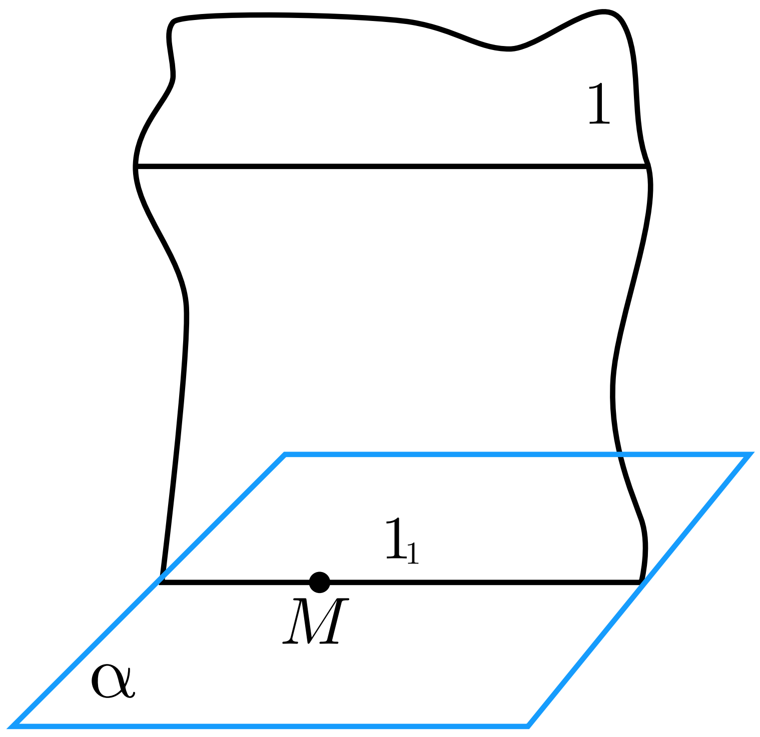


Лемма (вспомогательная теорема)
Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой

Дано: $\alpha_1 \cap \alpha_2 = l_1$, $l \subset \alpha_2$, $l || \alpha_1$
Доказать: $l || l_1$
Доказательство: (методом от противного)
Пусть $l \cap l_1$, тогда $l \cap \alpha_1$, что противоречит условию, так как $l || \alpha_1$. Значит предположение не верно, т.е $l || l_1$.



Теорема (признак параллельности прямой и плоскости). Для того чтобы прямая была параллельна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы прямая была параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости.



Доказательство
1) Необходимое условие.
Дано: $1||\alpha$
Доказать: существует $1_1 \subset \alpha$, $1||1_1$
в.с.д
проведем плоскость через прямую 1 и точку $M \in \alpha$.
Тогда по предыдущей лемме $1||1_1$.

2) Достаточное условие.
Дано: $1||1_1$, $1_1 \subset \alpha$
Доказать: $1||\alpha$
в.с.д
Пусть $1 \cap \alpha = M$
Тогда $M \in \alpha$ и $M \in \beta$,
Значит $M \in 1_1$ так как $1_1 = \alpha \cap \beta$, т.е. $1 \cap 1_1 = M$,
что противоречит условию.
Значит $1||\alpha$.
ч.т.д.