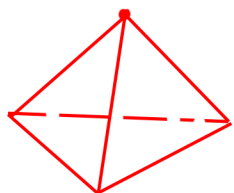


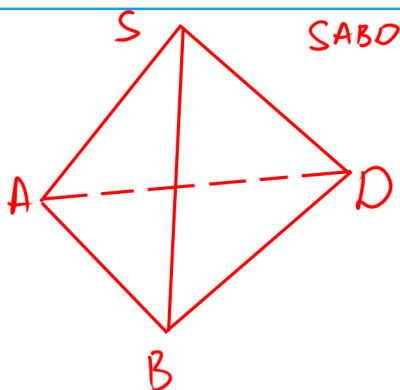
МНОГОГРАННИКИ И ИХ СЕЧЕНИЯ

Тетраэдр

Определение



это многогранник, состоящий из плоскостей в виде Δ , и точек, к-рая не лежит в этой плоскости и соединена со всеми вершинами Δ .

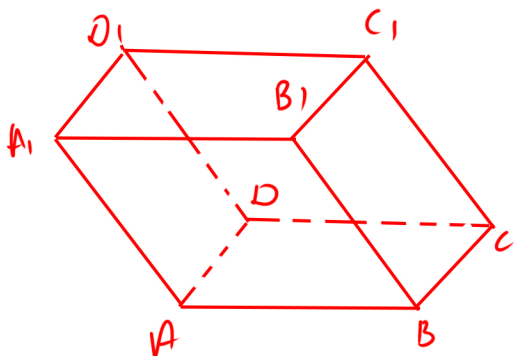


Грани тетраэдра — треугольники Δ : ASB ; BSD ; ASD ; ABD . 4 шт.

Ребро тетраэдра — отрезки AS ; SD ; SB ; AD ; BD ; AB . 6 шт.

Вершина тетраэдра — A ; D ; B ; S . 4 шт.

Параллелепипед



это многогранник, состоящий из 2-ух параллелограммов лежащих в параллельных плоскостях и соединенные ребрами между собой.

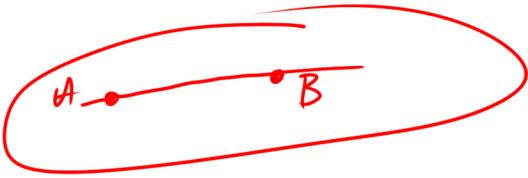
Свойства

1. Противоположные грани равны и $\parallel$
2. Диагонали перес и точкой перес делятся пополам.

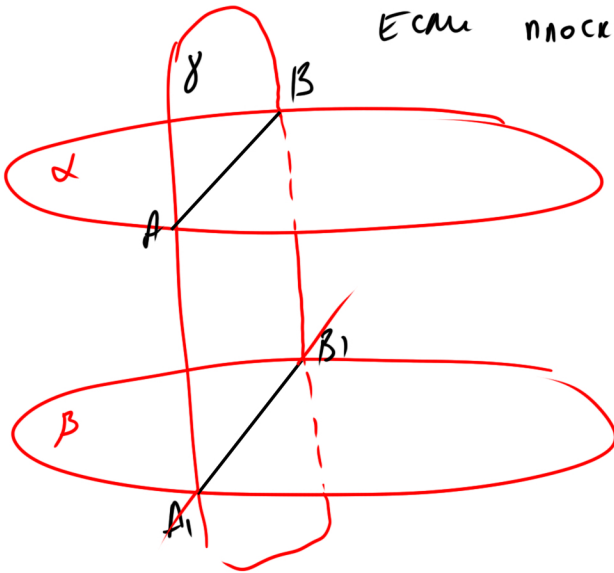
Построение сечений

Факты, которыми мы пользуемся:

1. Если 2 точки прямой лежат в плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости

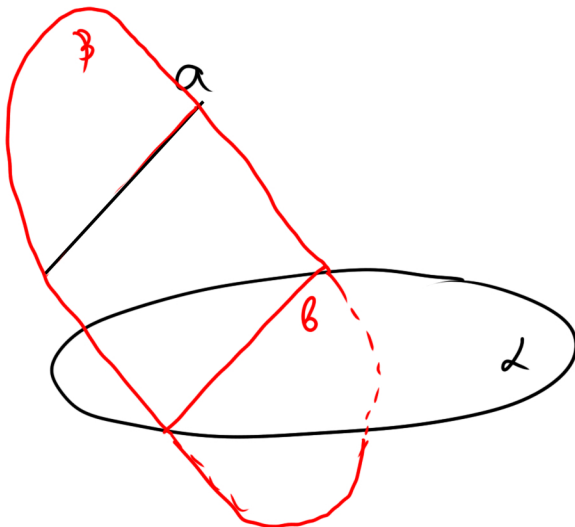


2. Если плоскость перес. 2 паралл. плоскостей, то прямые пересечения будут $\parallel$.



$$\begin{aligned} & \alpha \parallel \beta \\ & \gamma \cap \alpha = AB \\ & \gamma \cap \beta = A_1B_1 \end{aligned} \Rightarrow AB \parallel A_1B_1$$

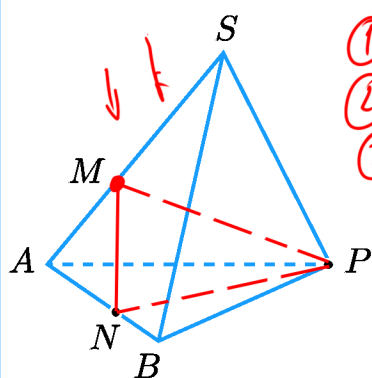
3.



$$\begin{aligned} & a \parallel \alpha \\ & a \subset \beta \\ & \beta \cap \alpha = b \end{aligned} \Rightarrow a \parallel b$$

Если плоск. проходят через прямую $\parallel$ др. плоскости и пересекаются, то прямая пересечения $\parallel$ начальной прямой.

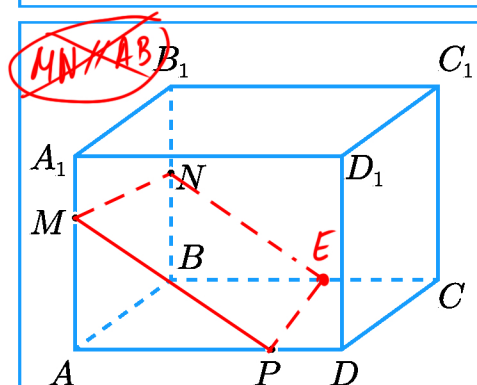
Задачи. Построить сечение, проходящее через точки M , N и P .



- ① MP
- ② NP
- ③ MN

$M(ASB) (ASP)$
 $P(ABP) (ASP)$

MPN - иск. сечение.



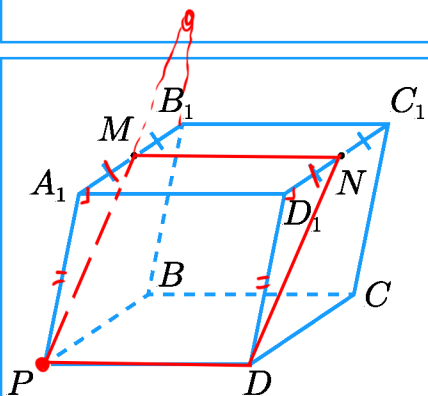
- ① MN

- ② MP

- ③ через τ N проведем прямую $//MP$, NE

- ④ PE

$MNEP$ - иск. сечение.



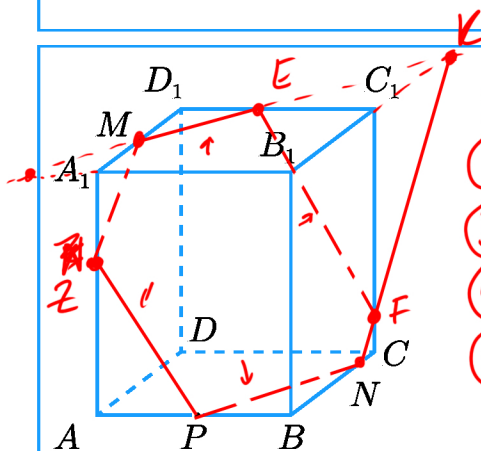
- ① MN

- ② MP

- ③ $(A_1D_1C_1) // (PDC) \Rightarrow MN // PD$

- ④ ND

$MPDN$ - иск. сеч.



- ① PN

- ② $(A_1B_1C_1) // (ABC) \Rightarrow$ пров $ME // PN$

- ③ $ME \cap B_1C_1 = K$

- ④ KN ; $KN \cap C_1C = F$

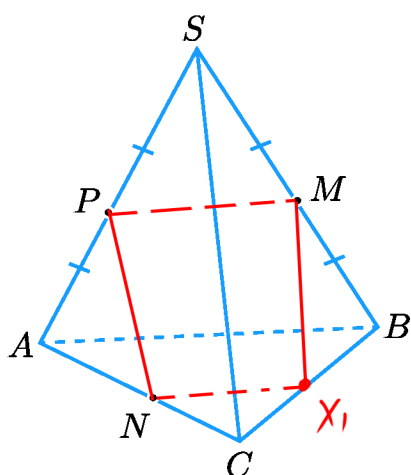
- ⑤ $(ABB_1) // (DCC_1) \Rightarrow$ пров $PE // EF$

- ⑥ $PE \cap AA_1 = Z$

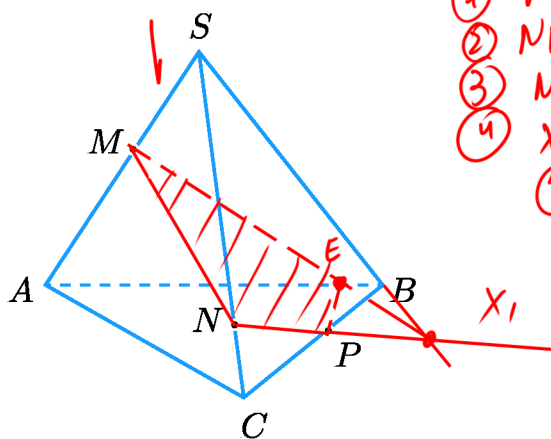
- ⑦ NP

$ZMEFNP$ - иск. сеч.

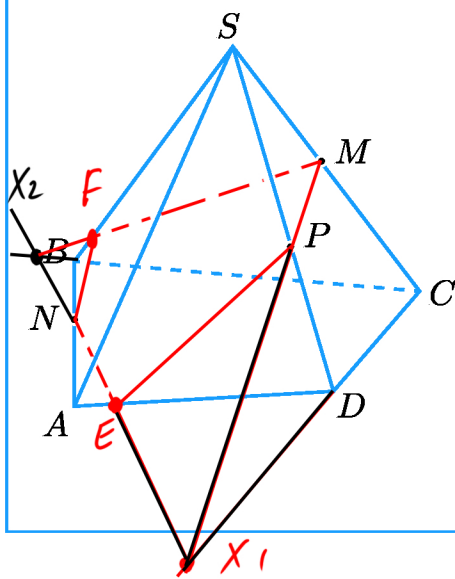
Задачи. Построить сечение, проходящее через точки M , N и P .



- ① PM
 - ② PN
 - ③ MP - ср. линия $\triangle ASB \Rightarrow PM \parallel AB, \Rightarrow PM \parallel (ABC)$, значит проведем через N прямую $\parallel PM$: $NX_1 \parallel PM$
 - ④ X_1, M
- PMX_1N - иск. сеч.

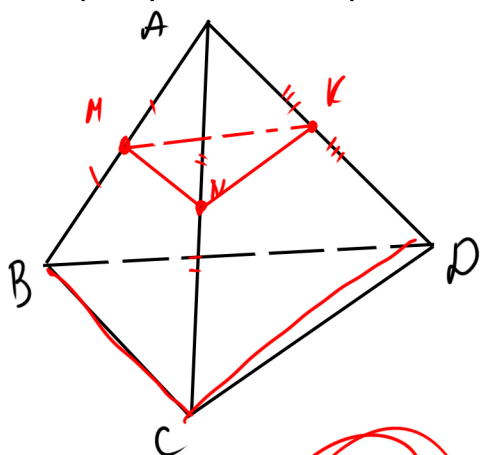


- ① MN
 - ② NP
 - ③ $NP \cap SB = X_1$
 - ④ $X_1M \cap AB = E$
 - ⑤ PE
- $PMEN$ - сеч.



- ① MP
 - ② $MP \cap CD = X_1$
 - ③ $X_1N \cap AD = E$
 - ④ EP
 - ⑤ $NE \cap BC = X_2$
 - ⑥ $X_2M \cap BS = F$
 - ⑦ NF
- $FMPEN$ - сеч. α .

1. Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер AB , AC и AD тетраэдра $ABCD$, параллельна плоскости BCD .



Докоз.
 $ABCD$ - тетра.
 M - сер AB
 K - сер AD
 N - сер AC
 D - т.б.
 $(MNK) \parallel (BCD)$

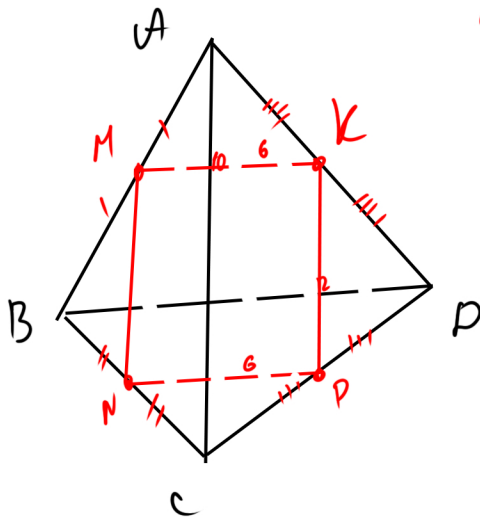
Р-во:
 ① MN
 ② MK
 ③ NK
 MNK - евкл. сеч.
 ② MN - ср. лин. $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel BC$;
 NK - ср. лин. $\triangle ACD \Rightarrow NK \parallel CD \Rightarrow$

$MNK \parallel BCD$ (признак $\parallel$ плоскостей)



2. В тетраэдре $ABCD$ точки M , N и P являются серединами рёбер AB , BC и CD , $AC = 10$ см, $BD = 12$ см.

- а) Докажите, что плоскость MNP проходит через середину K ребра AD
 б) Найдите периметр четырёхугольника, получившегося при пересечении тетраэдра с плоскостью MNP .



- а) ① MP ;
 ② NM

NP - ср. лин. $\triangle BCD \Rightarrow NP \parallel BD \Rightarrow$
 $NP \parallel (ABD) \Rightarrow$ через т.м. пров.
 прямую $\parallel NP = MK$.

$NP \parallel BD$; $NP \parallel MK \Rightarrow MK \parallel BD \Rightarrow$

Если $AM = MB$, то $AK = KD$ (т. Паралл.)

- ③ KP

б) $MK \parallel NP$; $MK = \frac{BD}{2} = 6$ (т.к. MK - ср. лин.)
 $NP = \frac{BD}{2} = 6$ (NP - ср. лин.) $\Rightarrow MK = NP \Rightarrow$

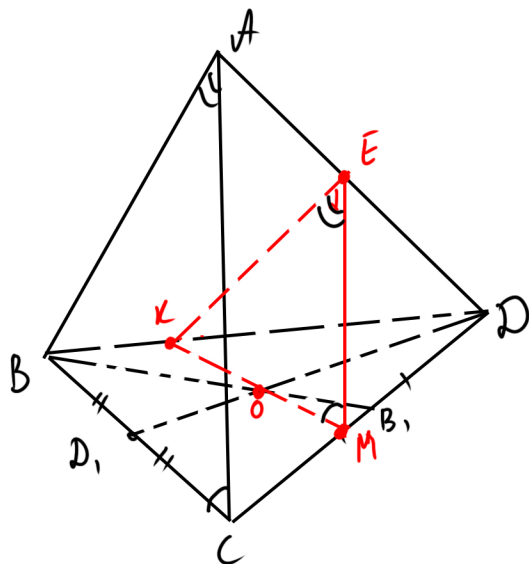
$MKPN$ - параллелограмм.

MN - ср. лин. $\triangle ABC \Rightarrow MN = \frac{AC}{2} = 5$ $P_{MKPN} = 2(6 + 5) = 22$

Через точку пересечения медиан грани BCD тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость, параллельная грани ABC .

а) Докажите, что сечение тетраэдра этой плоскостью есть треугольник, подобный треугольнику ABC .

б) Найдите отношение площадей сечения и треугольника ABC .



① через т.О проведем прямую $KM \parallel BC$
 $KM \cap BD = K$; $KM \cap CD = M$ (т.к.
 пл. сечения $\parallel (ABC)$; $BCD \cap ABC = BC$)

② $ACD \cap ABC = AC \Rightarrow$
 через т.М проведем $ME \parallel AC$
 $ME \cap AD = E$.

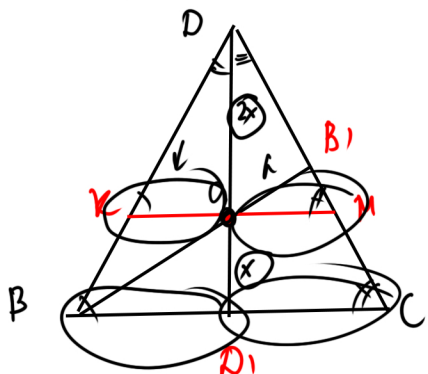
③ KE .

KEM -исконное сечение.

а) $KM \parallel BC \Rightarrow KM$ и BC - сонапр. лучи.
 $EM \parallel AC \Rightarrow EM$ и AC - сонапр. $\Rightarrow$
 $\angle BCA = \angle KME$

б) $KE \parallel AB$ ($(KEM) \parallel (ABC)$, $(ABD) \cap (ABC) = AB$; $(ABD) \cap (KEM) = KE$) $\Rightarrow$
 $\angle KEM = \angle BAC$ - углы между сонапр. $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KEM$ (по двум углам)

$$\text{б.) } \frac{S_{KEM}}{S_{ABC}} = K^2 \quad K = \frac{KM}{BC}$$



$\triangle KOD \sim \triangle BOD$,

$$\frac{KO}{BD} = \frac{DO}{BD_1} \Rightarrow \frac{KO}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$KO = \frac{2}{3} BD,$$

$\triangle DOM \sim \triangle DCD_1$,

$$\frac{OM}{CD} = \frac{2}{3} \quad OM = \frac{2}{3} CD,$$

$$KM = OK + OM = \frac{2}{3} BD + \frac{2}{3} CD = \frac{2}{3} (BD + CD) = \frac{2}{3} BC.$$

$$\frac{KM}{BC} = \frac{2}{3}$$

$$K^2 = \frac{4}{9}$$