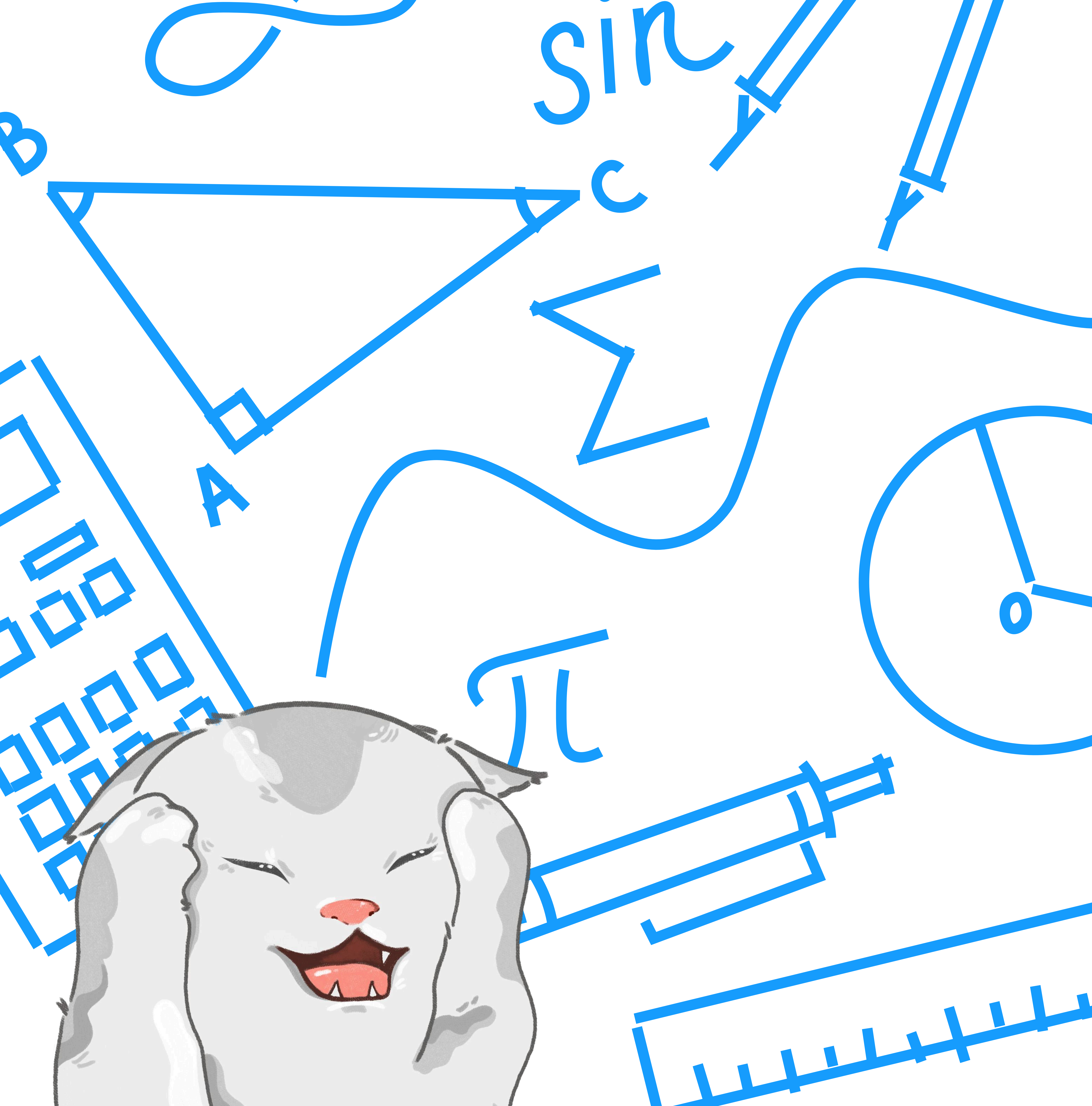
100Б

ТЕОРИЯ.

БОЛЬШОЙ КОНСПЕКТ ПО ВСЕЙ ТРИГОНОМЕТРИИ



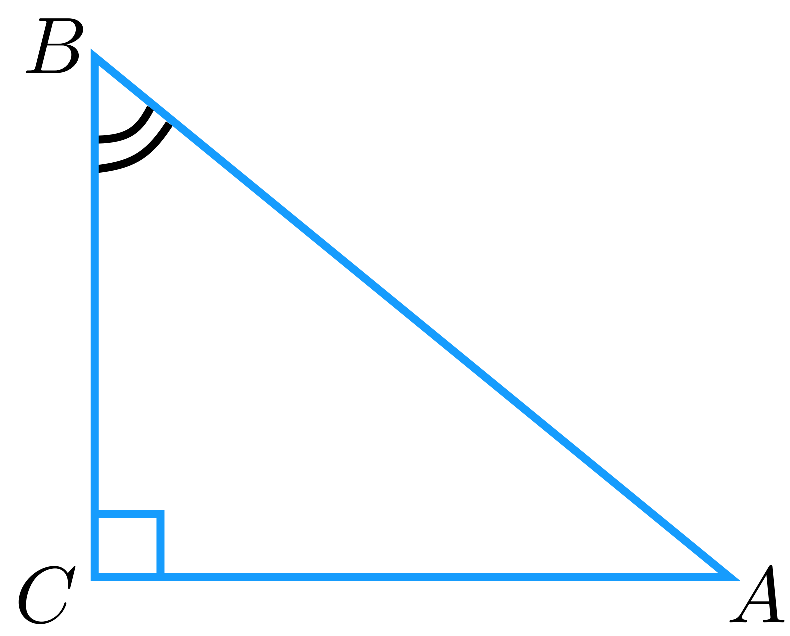
Тригонометрические определения

$$\sin B = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos B = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}} = \frac{BC}{AC}$$



Перевод градусов в радианы и наоборот

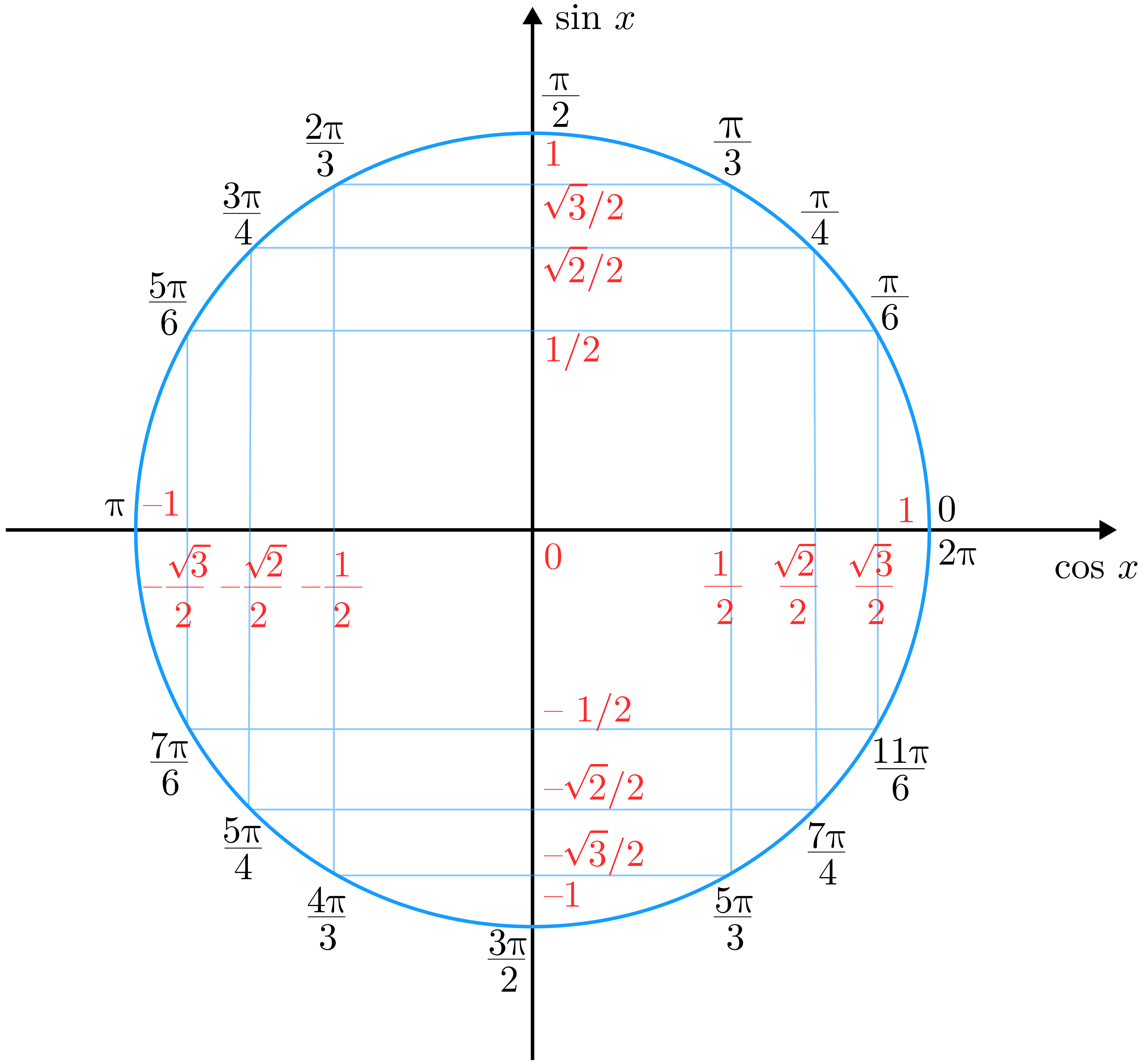
В тригонометрии углы можно измерять в **градусах (°)** и **радианах (rad)**.
Основное соответствие

$180^\circ = \pi$ (рад)

Формулы перевода:

- Из градусов в радианы: $x^\circ = x \cdot \dfrac{\pi}{180}$
- Из радиан в градусы: x (рад) $= x \cdot \dfrac{180^\circ}{\pi}$

Тригонометрическая окружность



Основные углы

α	градусы	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\ \alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\mathrm{ctg}\ \alpha$		—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Тангенс и котангенс

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\mathrm{ctg}\ \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\mathrm{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\mathrm{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\mathrm{tg}\ \alpha \cdot \mathrm{ctg}\ \alpha = 1$$

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$$

Формулы суммы/разности

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

Синус, косинус и тангенс двойного угла

Формулы **двойного и тройного угла**

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Синус, косинус и тангенс половинного угла

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

Формулы приведения

Формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$

Любую из формул приведения можно получить, пользуяюсь правилом:
а) в правой части формулы ставится такой же знак, какой имеет левая часть, если считать, что:

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

б) если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ или $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, то синус заменяется на косинус, а косинус - на синус; если же угол равен $\pi\pm\alpha$, то функция не меняет своего названия.

Для любого целого $n(n\in\mathbb{Z})$ справедливы равенства:

$$\sin(\alpha+2\pi n)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2\pi n)=\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi n)=\operatorname{tg}\alpha$$

Уравнение $\cos x=a$

1. Арккосинус числа $a\in[-1;\,1]$ (обозначается $\arccos a$) — такое число $a\in[0;\,\pi]$, косинус которого равен a, т. е.

$0\le\arccos a\le\pi$, $\cos(\arccos a)=a$.

Если $a\in[0;\,1]$, то $0\le\arccos a\le\frac{\pi}{2}$, если $a\in[-1;\,0)$, то $\frac{\pi}{2}<\arccos a\le\pi$.
Если $|a|>1$, то выражение $\arccos a$ не имеет смысла.

2. Для любого $a \in [-1;\ 1]$ справедливо равенство $\cos\ (\arccos\ a) = a$.
Равенство $\arccos(\cos\ a) = a$ является верным только при $a \in [0;\ \pi]$, хотя $\arccos\ (\cos\ a)$ имеет смысл при всех $a \in R$. Для любого $a \in [-1;\ 1]$ верно равенство $\arccos(-a) = \pi - \arccos\ a$.

3. Если $-1 \le a \le 1$, то все корни уравнения $\cos\ x = a$ определяются формулой $x = \pm\arccos\ a + 2\pi n$, $n \in Z$. Если $|a| > 1$, то уравнение $\cos\ x = a$ не имеет корней.

4. Формулы корней уравнения $\cos\ x = a$ при $a = 0,\ a = 1,\ a = -1$:

$$\cos\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\cos\ x = 1,\ x = 2\pi n,\ n \in Z;$$
$$\cos\ x = -1,\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Уравнение $\sin\ x = a$

1. Арксинус числа $a \in [-1;\ 1]$ (обозначается $\arcsin\ a$) такое число — $a \in =[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$ синус которого равен a, т. е.

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin\ a \le \frac{\pi}{2}\ ,\ \sin(\arcsin\ \mathrm{a}) = a.$$

Если $a \in [0;\ 1]$, то $0 \le \arcsin\ a \le \frac{\pi}{2}$, а если $a \in [-1;\ 0)$, то $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin\ a < 0$.
Если $|a| > 1$, то выражение $\arcsin\ a$ не имеет смысла.

2. Для любого $a \in [1;\ 1]$ справедливо равенство

$$\sin(\arcsin\ a) = a.$$

Равенство

$$\arcsin\ (\sin\ a) = a$$

является верным при $a \in =[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$ хотя выражение в левой части имеет смысл при всех $a \in R$. Для любого $a \in [-1;\ 1]$ верно равенство $\arcsin(-a) = -\arcsin\ a$.

3. Для любого $a \in [-1;\ 1]$ справедливо равенство

$$\arcsin\ a + \arccos\ a = \frac{\pi}{2}$$

4. Если $|a| \leq 1$, то все корни уравнения $\sin x = a$ определяются формулой

$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$.

Если $|a| > 1$, то уравнение $\sin x = a$ не имеет корней.

5. Формулы корней уравнения $\sin x = a$ при $a = 0,\ a = 1,\ a = -1$:

$\sin x = 0,\ x = \pi n,\ n \in Z$;

$\sin x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$;

$\sin x = -1,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

1. Арктангенс числа $a \in R$ (обозначается $\operatorname{arctg} a$) — такое число $a \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен a, т. е.

$-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2},\ \operatorname{tg} \alpha = a$.

2. Для любого $a \in R$ справедливо равенство

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$.

Равенство

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha$
является верным только при $a \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Для любого $a \in R$ справедливо равенство
$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

3. Для любого $a \in R$ уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни, определяемые формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z.$$